

文章编号: 1671-0444(2018)04-0664-06

# 正投影法融合三维造型的研究

马惠仙, 邹培玲, 赵菊娣

(华东理工大学 机械与动力工程学院, 上海 200237)

**摘要:** 由于正投影法的逻辑性不够严密,使得空间想象力的形成依赖于经验。从数学方法具有普适性的视角引出逻辑思维在形成空间想象力中的优点和不足。阐述几何拉伸和压缩原理,应用两几何形体求交集的方法实现逻辑严密的空间想象。通过交集运算设计三维模型,验证所述原理、方法的正确性,并以视图与三维造型的联系来说明形成空间想象的具体途径。研究结果表明,正投影与三维造型融合是更为合理的物体表达方法。

**关键词:** 正投影法; 空间想象; 几何拉伸; 几何压缩; 交集

**中图分类号:** TP 391      **文献标志码:** A

## Integration of Orthographic Projection and 3D Modeling

MA Huixian, ZOU Peiling, ZHAO Judi

(School of Mechanical and Power Engineering, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China)

**Abstract:** The formation of space imagination depends on experience because the logic of orthographic projection method is not strict enough. The advantages and disadvantages of logical thinking in the formation of spatial imagination are derived from the perspective of the universality of mathematical methods. The principles of geometric stretching and compression were expounded, and the method of intersection of two geometric bodies was used to realize the space imagination with strict logic. The three-dimensional (3D) model was designed by intersection operation to verify the principle and the correctness of the method, and the concrete way to form spatial imagination was illustrated by the relation between view and 3D modeling. The results show that the fusion of orthographic projection and 3D modeling is a more reasonable way to express objects.

**Key words:** orthographic projection; spatial imagination; geometric stretch; geometric compression; intersection

### 1 正投影法普适性问题的提出

正投影法是投射线与投影面相垂直的平行投影法,所得的投影即为正投影<sup>[1-2]</sup>。显然,正投影法涉及到几何元素与其投影之间的对应关系。一般而言,点、线、平面、平面立体等几何元素与其正投影之间存在唯一的一一对应关系,而光滑曲面却不存

此对应关系,这是因为光滑曲面上并无可视、可触的轮廓线。曲面在某一点的切平面如图1所示。对曲面投影轮廓分析如下:过曲面 $\Sigma$ 上一点 $P$ 可以在曲面上任意作两条不同的曲线 $C_1$ 、 $C_2$ ,再过 $P$ 点分别作 $C_1$ 、 $C_2$ 的两条切线 $T_1$ 、 $T_2$ ,该相交两切线构成了一个平面 $\pi$ , $\pi$ 面是曲面在 $P$ 点的切平面。可以证明曲面上过 $P$ 点的所有曲线的切线都属于 $\pi$ 平面。光

收稿日期: 2018-02-07

作者简介: 马惠仙(1965—),女,上海人,副教授,硕士,研究方向为计算机图形学与工程图学,Email:mhx65@163.com

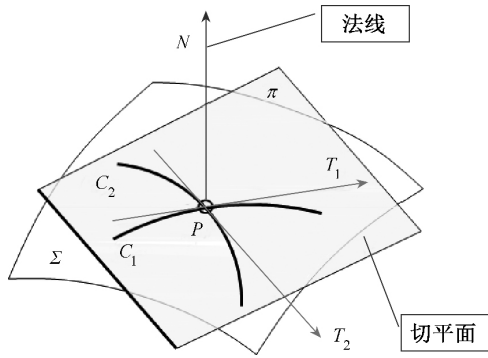


图 1 曲面在一点的切平面

Fig. 1 The tangent plane of a curved surface at a point

滑曲面上每个点都有一个切平面,切平面平行投射方向的点的轨迹就是曲面按此方向的投影轮廓线。轮廓线与投射方向有关,其表达的是某方向下的投影范围<sup>[3]</sup>。由同一个正投影法得到的投影有的有唯一对应被表达的几何元素,有的却因投射方向变化而变化,缺乏逻辑上的严密性和方法上的普适性。而在数学上则可借助微分几何包络理论来获得唯一的曲面投影轮廓。

以轴线为铅垂线,底圆半径为  $R$ 、高为  $h$ 、半圆锥角为  $\alpha$  的圆锥面为例来说明包络原理。将圆锥面看作一变半径球面沿轴线移动所形成的球面族的包络。圆锥面的投影如图 2 所示。

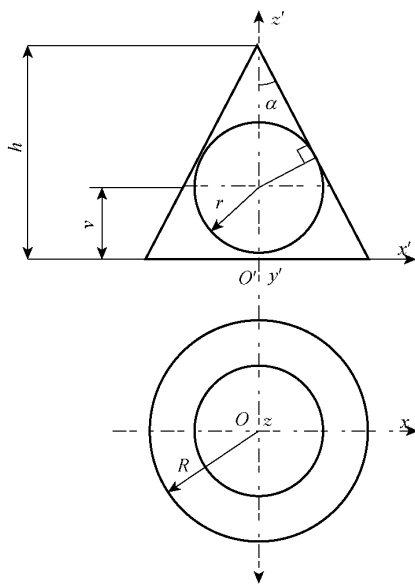


图 2 圆锥面的投影

Fig. 2 Projection of conical surface

根据图 2 所建的坐标系,设球面的正面投影圆方程为

$$F(x, y, v) = x^2 + (z - v)^2 - (h - v)^2 \sin^2 \alpha = 0 \quad (1)$$

对式(1)求偏导数,得

$$\frac{\partial F}{\partial v} = -2(z - v) + 2(h - v) \sin^2 \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\text{由此得: } (z - v) = (h - v) \sin^2 \alpha \quad (3)$$

将式(3)代入式(1)得

$$x = \pm (h - v) \sin \alpha \cos \alpha \quad (4)$$

$$\text{再由式(3)得: } v = \frac{z - h \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \quad (5)$$

将式(5)代入式(4)可得:

$$x = \pm (h - \frac{z - h \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}) \sin \alpha \cos \alpha \quad (6)$$

式(6)包含了两条直线方程,该两直线共圆锥的顶点,当  $x = \pm R$  时,  $z = 0$ ; 当  $x = 0$  时,  $z = h$ , 说明圆锥的 V 面投影轮廓线是一左一右两条过锥顶的直线,底部直线是圆锥底圆的正面投影。底圆方程为

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (7)$$

显然,用数学方法可以确定曲面的投影轮廓,逻辑是严密的,方法也具有普适性<sup>[4]</sup>。但其既不直观也不方便,为此提出用几何拉伸与压缩的方法来确定物体的投影范围。

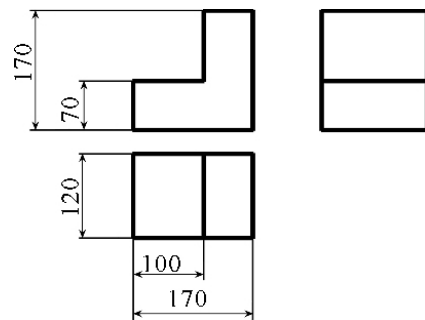
## 2 几何拉伸与压缩

几何压缩是一系列相互平行的平面截切物体,各断面图形向某一投影面投射的集合。

几何拉伸是一系列相互平行的平面截切物体,各断面图形的集合。

### 2.1 简单平面立体

根据几何拉伸定义,沿弯板三视图(见图 3(a))各表面的法向拉伸都可获得其原型,如图 3(b)~(d)所示。而根据几何压缩定义,则可得到弯板的三视图(见图 3(e))



(a) 弯板视图

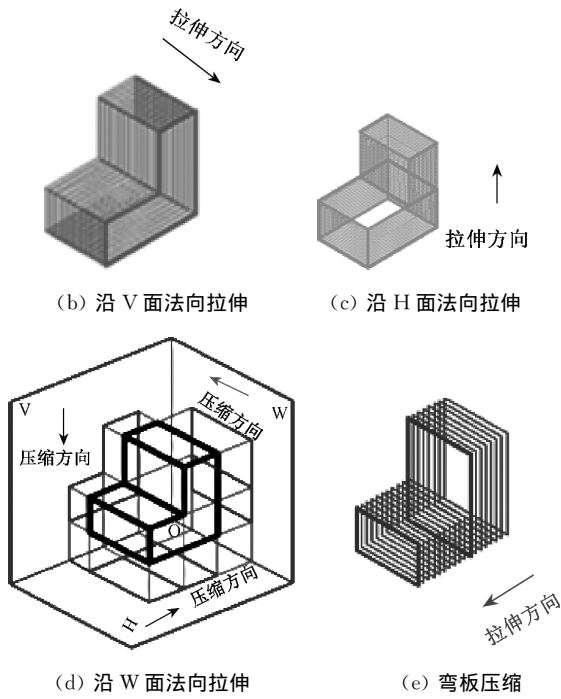


图 3 弯板的视图与拉伸

Fig. 3 Views and stretching of bending board

### 2.2 简单曲面立体

以轴为铅垂线的圆锥为例,集合一系列直径变化的水平截圆获得圆锥,反方向将各水平圆向 H 面投射得到圆锥水平投影,如图 4(a)所示。同理,V 面投影可以看作是将各截断面向 V 面投射的集合。此时各位置的截面图形是一系列大小不同的双曲线,相当于地形面表示法中的“等高线”,如图 4(b)所示<sup>[5-6]</sup>。

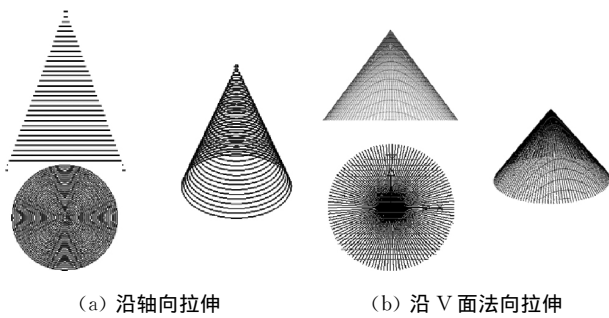


图 4 拉伸形成圆锥面

Fig. 4 Stretching to form a conical surface

### 3 拉伸形体的交集运算

几何拉伸由各截面的图形及其位置确定,从图 3(a)可知,将主视图拉伸宽度尺寸 120 mm,将俯视图分别拉伸两个高度尺寸 70 和 100 mm,或将左视图分别拉伸两个长度尺寸 70 和 100 mm,两者都可以得到弯板。由此可见弯板是某两个形体的交集,这是因为交集中包含了弯板的三维尺度。图 5(a)

所示为一物体的主、俯视图。根据交集运算原理,该物体形成步骤如下:(1)将主、俯视图处理成框图  $V_0$ 、 $H_0$ ,如图 5(b)所示;(2)拉伸图框  $V_0$ ,拉伸距离为俯视图的总宽,如图 5(c)所示,拉伸图框  $H_0$ ,拉伸距离为主、视图的总高,如图 5(d)所示;(3)求出两个拉伸形体的交集,即得三维模型,如图 5(e)所示。此过程说明图 5(b)已经满足造型所需的信息,分析如下:按看不见的部分用虚线表达的规定,主视图中的虚线  $a'$  是左端凹槽侧平面的投影,需要画出。但在拉伸主视图时虚线  $a'$  其实是重复信息,因为俯视图中线条  $a$  也表达此侧平面的位置,所以虚线  $a'$  可以删除。按视图完整性要求,在俯视图中也需要画出表达模型中部凹槽左、右两个侧平面位置的线条  $b$ 、 $c$ 。但主视图中的线条  $b'$ 、 $c'$  也表达这两个位置,在拉伸俯视图时线条  $b$ 、 $c$  是重复信息,去掉重复信息将俯视图变成框图,也不影响拉伸结果。

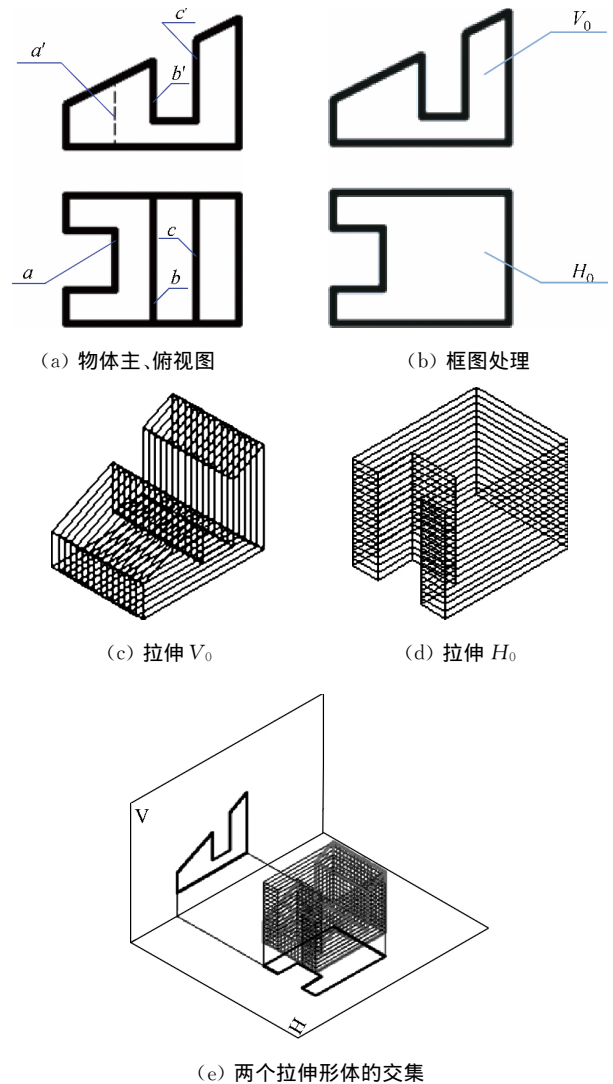
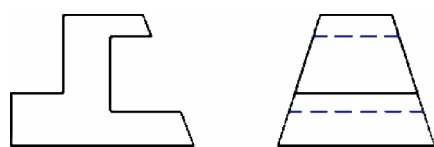


图 5 交集运算图例

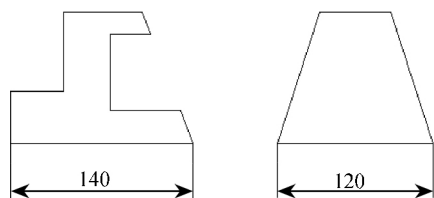
Fig. 5 Intersection operation legend

### 4 视图与三维造型的联系

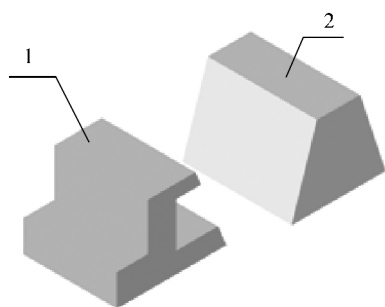
平面立体的形成与其投影的关系如图 6 所示。根据几何拉伸、压缩的定义,在二投影面体系中,将图 6(a)中的主、左视图处理成框图,如图 6(b)所示,分别对其进行拉伸。其中,主视图拉伸距离为 120 mm,左视图外轮廓拉伸距离为 140 mm,得形体 1 和形体 2,如图 6(c)所示。由于左视图是物体向 W 投影面投射后随投影面一起旋转 90°后达到与 V 投影面共面后的图形,因此将形体 2 逆旋转 90°,如图 6(d)所示,并平移该形体与形体 1 重叠,如图 6(e)所示,再求交集形成图 6(f)所示的三维形体,也就是图 6(a)中主、左视图所表达的物体。



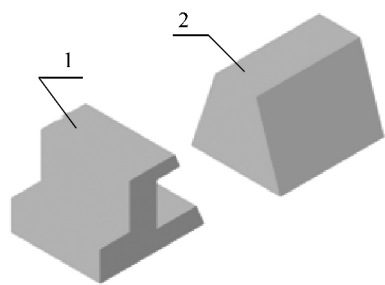
(a) 物体的主、左视图



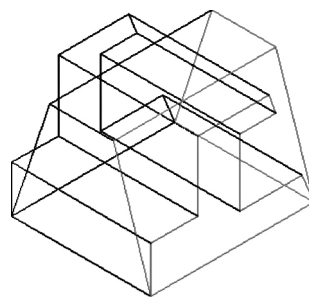
(b) 两视图的外轮廓



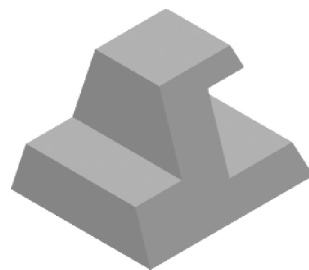
(c) 拉伸主视图与左视图外轮廓



(d) 旋转拉伸形体 2



(e) 平移拉伸形体 2 与拉伸形体 1 完整重叠

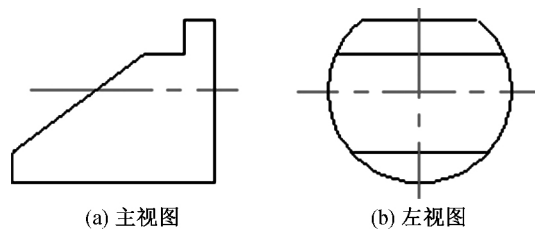


(f) 拉伸形体 1、2 求交运算

图 6 平面立体的形成与其投影的关系

Fig. 6 Relationship between the formation of planar stereo and its projection

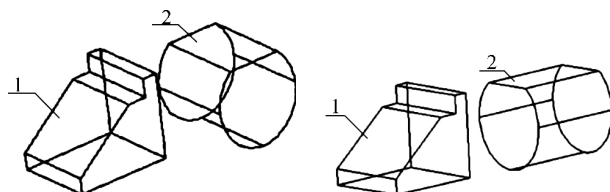
一般而言,平面立体的两个视图包含了其三维尺度,所以主视图按左视图的宽度拉伸,而左视图按主视图的长度拉伸,两个拉伸形体的公共部分包含了物体的三维尺度,从而确定了物体的形状。这一原理也适合于曲面立体。一曲面立体的主、左视图如图 7 所示。按上述原理将主视图拉伸左视图的宽度,将左视图处理成框图再拉伸主视图的长度(见图 8(a)),将形体 2 旋转 90°(见图 8(b)),平移旋转后的形体 2 与形体 1 重叠(见图 8(c)),形体 1、2 的交集运算形成的结果即为由物体主、左视图重建的模



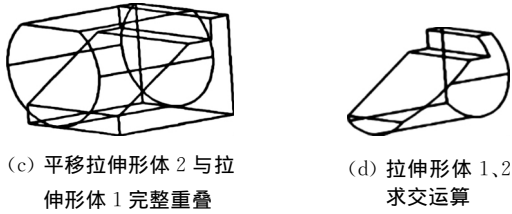
(a) 主视图 (b) 左视图

图 7 曲面立体的主、左视图

Fig. 7 Front and left views of surface cubic



(a) 拉伸主视图与左视图外轮廓 (b) 旋转拉伸形体 2



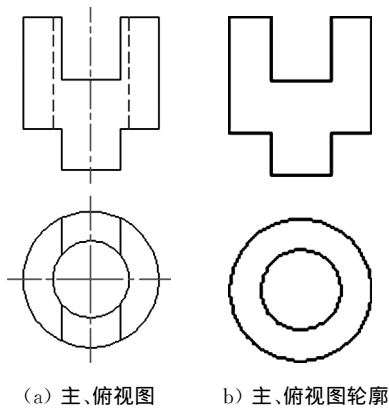
(c) 平移拉伸形体 2 与拉伸形体 1 完整重叠

(d) 拉伸形体 1、2 求交运算

图 8 曲面立体的形成与其投影的关系

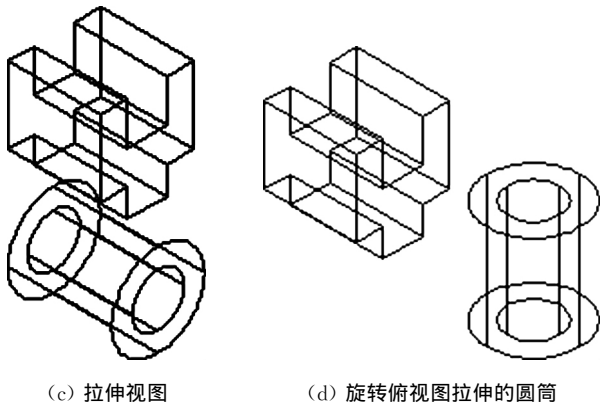
Fig. 8 Relationship between the formation of three-dimensional surface and its projection

型(见图 8(d))。同理,如果利用主、俯视图重建物体,则需将拉伸俯视图形成的简单形体绕  $x$  轴旋转  $90^\circ$  后再作平移、重叠、求交集处理,如图 9 所示<sup>[7]</sup>。



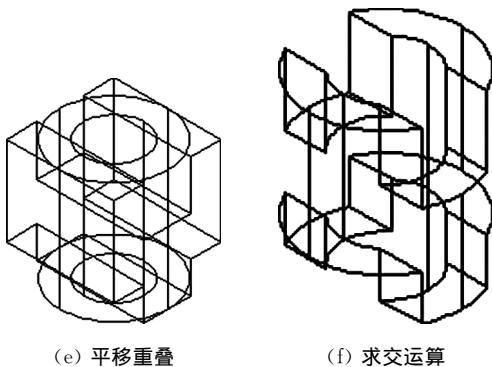
(a) 主、俯视图

(b) 主、俯视图轮廓



(c) 拉伸视图

(d) 旋转俯视图拉伸的圆筒



(e) 平移重叠

(f) 求交运算



(g) 渲染效果

图 9 主、俯视图构造形体的过程

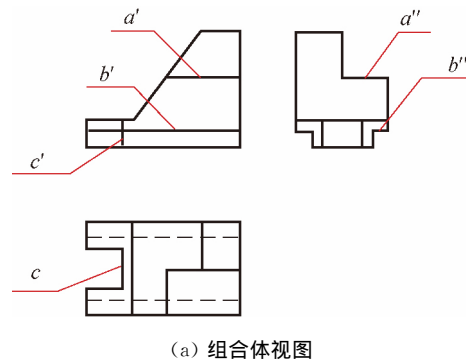
Fig. 9 Process of constructing a form in the front and top views

由正投影法可知,三视图中每个视图反映物体的二维尺度,三个视图共反映六维,其中有三维是重复的,这些重复信息是长对正、高平齐、宽相等的依据,在画三视图时都是必需的。但从应用几何拉伸与交集运算建立这个三维物体的模型角度来看,这些重复信息就是多余的,应予删除。例如:一切割式组合体由三视图构造形体(见图 10)时,对于图 10(a)所示的组合体视图,只需要图 10(b)所示的信息就可以确定其外观形状。造型步骤如下:

(1) 将三视图处理成框图如图 10(b)所示,使其符合拉伸条件。框图的转化依据以主视图为例加以说明,主视图中图线  $a'$ 、 $b'$  都是水平面的正面投影,删除  $a'$ 、 $b'$  后两个水平面的上、下位置仍可由左视图上的图线  $a''$ 、 $b''$  表示。虚线  $c'$  是侧平面的正面投影, $c'$  被删除后这个侧平面的位置可在俯视图中找到,即  $c$  也同样表示其左右位置,说明主视图转化成框图后,并不缺少拉伸所需的信息。对其余两个视图的框图转化也可作相同分析,在此不再赘述。由此得出规律:当框图内图线所示的信息可在其他视图上得到时,该图线可删除,不影响拉伸结果,否则要作预处理。

(2) 拉伸各图框得到 3 个简单形体,如图 10(c)所示。

(3) 平移 3 个简单形体使它们完全重叠,如图 10(d)所示。



(a) 组合体视图

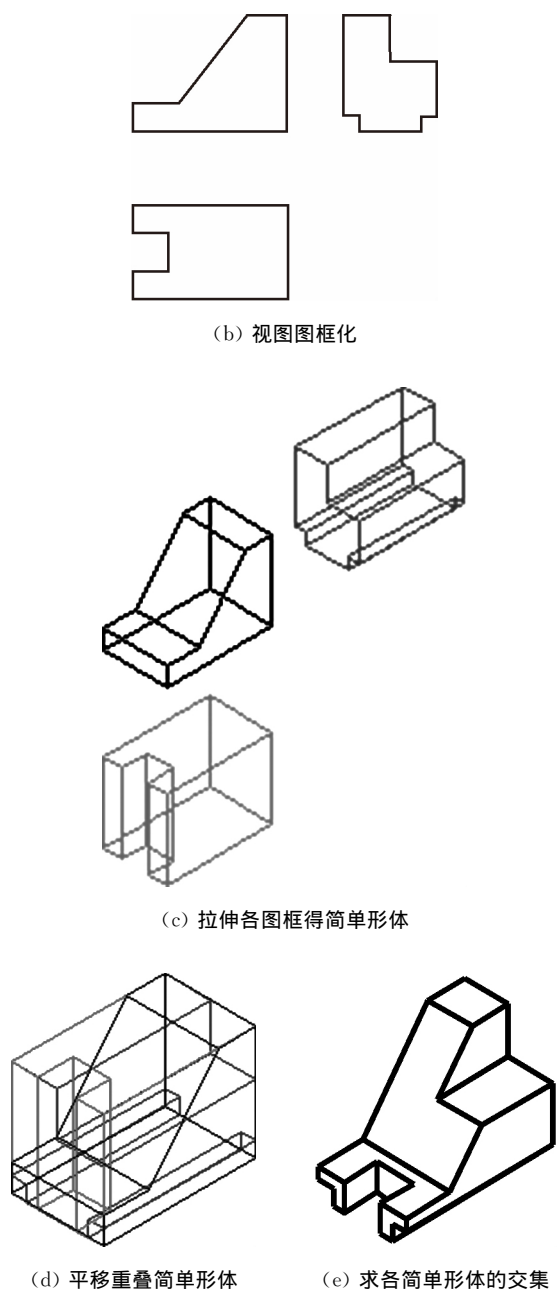


图 10 由三视图构造形体的过程  
Fig. 10 Process of constructing a form from three views

(4) 对重叠后的 3 个简单形体求交集获得图 10(a)所表达的组合物体,如图 10(e)所示。对图 11(a)所表达的叠加式组合物体,可先做预处理,即将其分解成几个简单形体的视图,再按上述规律分别造型,如图 11(b)所示,最后组合成组合物体,如图 11(c)所示。具体步骤分析从略。

### 5 结 语

正投影法是从自然投影现象抽象出来的,其直观性好,容易理解,但先天不足是一个正投影不能确定原型。为了得到具有可复原型的正投影图,至少

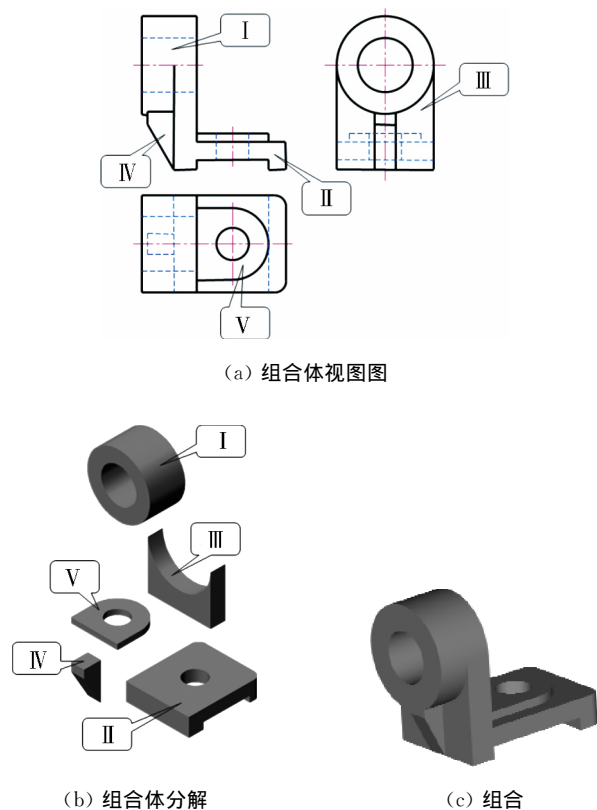


图 11 组合图形形体分析  
Fig. 11 Analysis for composite solid

必须有两个互相关联的正投影。但如果由互相关联的正投影想象原型时不对必要信息和重复信息进行判别,而是仅凭经验想象物体,所谓的空间想象容易变成“空想”,也形不成“想象力”。本文提出的几何拉伸和压缩是图形移动的集合,形象直观具有可视性。提出的交集运算使空间想象不再是经验性的,因为交集运算属于布尔运算的一种,布尔运算的过程就是构造每个面拓扑信息和几何信息,再由此决定哪些面构成新物体,其逻辑十分严密。因此,建立在逻辑思维基础上的形象思维才是空间想象力的基础,正投影法应该融入几何拉伸与压缩及交集运算,并与三维造型相结合,使其具有普适性和确定原型的可操作性。

### 参 考 文 献

[1] MONGE G. 蒙日画法几何学[M]. 廖先庚,译. 长沙:湖南科技出版社,1984:9-11.  
[2] LUZADDER W J. Fundamentals of engineering drawing for design product development and numerical control[M]. Seventh edition, Upper Saddle River:Prentia Hall,1980:69-73.  
[3] 马香峰. 确定共轭曲面的方法及其应用[M]. 北京:机械工业出版社,1989:163-168.

(下接第 681 页)

住空间缩小与居住质量要求提高之间的矛盾。在此背景下,本文研究分析模块化家具设计的影响因素,针对城市新移民的家居环境问题,结合设计实践,验证模块化家具对提升城市新移民家居环境的有效性和可行性。下一步,本研究将致力于进一步科学优化模块化家具系统,实现模块化理念在家具设计领域的创新和应用,并为其他设计领域先进作业模式的研究提供借鉴。

### 参 考 文 献

- [1] 冯磊. 基于模块化思想的小户型家具设计研究[D]. 沈阳: 沈阳航空航天大学设计艺术学院, 2013.
- [2] 张弛. 模块家具设计[J]. 工业设计, 2011(7): 217.
- [3] 何灿群, 詹慧娟. 模块化打包家具设计研究[J]. 包装工程, 2011, 32(16): 26-29.

- [4] 安胜足, 翟燕, 李鑫, 等. 现代家具模块化设计[J]. 木材工业, 2007, 21(1): 39-41.
- [5] 林海. 家具模块化设计方法实例分析[J]. 家具与室内装饰, 2005(9): 20-22.
- [6] NORMAN D A. Emotional design: Why we love (or hate) everyday things[M]. New York: Basic Books, 2005.
- [7] 徐硕, 陶毓博, 李鹏. 模块化在柜类家具设计中的应用研究[J]. 林业机械与木工设备, 2011, 39(11): 37-39.
- [8] 中国标准委员会. GB/T 3326—2016 家具桌、椅、凳类主要尺寸: [S]. 北京: 中国标准出版社, 2017.
- [9] NORMAN D A. The design of everyday things[M]. New York: Basic Books, 2002.
- [10] 于静. 基于模块化的家具定制模式的研究[J]. 包装工程, 2007, 28(9): 107-122.

(责任编辑: 徐惠华)

(上接第 669 页)

- [4] 张彩明, 杨兴强, 李学庆, 等. 计算机图形学[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 176-181.
- [5] 李学志, 方戈亮, 孙力红. VisuaLISP 程序设计[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006: 286-290.
- [6] 何援军. 计算机图形学[M]. 2 版. 北京: 机械工业出版社, 2009: 109-114.

- [7] 林大钧. 计算机实验工程图形学(上册) [M]. 北京: 机械工业出版社, 2014: 21-23.

(责任编辑: 杜 佳)