第 44 卷 第 5 期
2018 年 10 月

东华大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF DONGHUA UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol. 44, No. 5
Oct. 2018

文章编号：1671-0444(2018)05-0839-12

带源项的吸引-排斥趋化模型解的有界性

戴 超，陶有山
(东华大学 理学院，上海 201620)

摘要：研究了以老年痴呆症疾病中小神经胶质细胞集聚现象为背景的一个趋化性吸引-排斥数学模型。对初始数据作合适的正则性假设，利用先验估计技巧和延拓准则，当 Logistic 阻尼充分强时，证明了带源项的吸引-排斥趋化模型的黎曼初边值问题存在有界的整体古典解。

关键词：趋化性；吸引-排斥；Logistic 阻尼；有界性
中图分类号：O 175.26 **文献标志码**：A

Boundedness of Solutions in an Attractive-Repulsive Chemotaxis Model with Logistic Source

DAI Chao, *TAO Youshan*
(College of Science, Donghua University, Shanghai 201620, China)

Abstract: This paper studied an attractive-repulsive chemotaxis model that describes the aggregation of microglia observed in Alzheimer's disease. It is shown that this model admits a global and bounded classical solutions provided the logistic dampening is sufficiently strong, under some appropriate assumptions on the regularity of initial data, relying on a priori estimate techniques and extensibility criterion.

Key words: chemotaxis; attraction-repulsion; Logistic dampening; boundedness

---

趋化性是由化学信号的浓度梯度引起的细胞偏向运动。趋化吸引是指细胞朝化学信号浓度增大的地方迁移，而趋化排斥是指细胞朝远离化学信号浓度增大的地方运动。著名的趋化数学模型是由 Keller 和 Segel 在 20 世纪 70 年代提出的 KS 模型[1]，本文在 KS 模型的基础上，研究了文献[2]提出的描述老年痴呆症疾病中小神经胶质细胞集聚现象，以及文献[3]中给出的有关趋化过程中的群体效应的吸引-排斥趋化模型。从数学的角度来说，经典的 KS 模型和群体效应吸引-排斥趋化模型存在的一个本质区别，即前者可以找到有用的 Lyapunov 泛函，而后者一般不存在这样的泛函。

因此，本文考虑带有 Logistic 源的吸引-排斥趋化模型，如式(1)所示。

$$
\begin{cases}
u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla v) + \zeta \nabla \cdot (u \nabla w) + f(u) & x \in \Omega,\ t > 0 \\
v_t = \Delta v - \alpha_1 v + \beta_1 u & x \in \Omega,\ t > 0 \\
w_t = \Delta w - \alpha_2 v + \beta_2 u & x \in \Omega,\ t > 0 \\
\partial_\nu u = \partial_\nu v = \partial_\nu w = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0 \\
u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), w(x,0) = w_0(x) & x \in \Omega
\end{cases}
\tag{1}
$$

收稿日期：2017-04-18
作者简介：戴 超(1989—)，男，安徽亳州人，硕士研究生，研究方向为偏微分方程，E-mail：18355308055@163.com
陶有山(联系人)，男，教授，E-mail：taoys@dhu.edu.cn

式中:$\Omega \subset \boldsymbol{R}^n (n \geqslant 1)$ 是一个光滑有界凸区域;∂_ν 表示边界 $\partial\Omega$ 的外法向量的导数;χ, ζ, α_1, α_2, β_1 和 β_2 均为给定的正参数;$u = u(x, t)$ 表示细胞的密度;$v = v(x, t)$ 表示吸引信号的浓度;$w = w(x, t)$ 表示排斥信号的浓度。f 满足 Logistic 条件,即

$$f(s) \leqslant as - bs^2,\ s \geqslant 0 \tag{2}$$

式中:$a \geqslant 0$, $b > 0$。

模型(1)中第一个方程描述细胞密度随时间的变化情况,等式右边第一项表示细胞的随机扩散,第二项表示细胞向化学信号浓度增加的方向移动,第三项则表示细胞向远离化学信号浓度增大的地方迁移,最后一项表明细胞的出生和死亡满足 Logistic 定律。模型(1)中第二个和第三个方程表明趋化吸引和趋化排斥的化学物质均有细胞自身分泌,并随时间经历扩散和衰减。模型(1)中,假设 u, v, w 满足零流边界条件,即假设在边界处细胞和两种化学物质的净流量为零。

本文假设模型(1)初始值 u_0, v_0, w_0 满足:

$$\begin{aligned} &0 \leqslant u_0 \in C^0(\bar{\Omega}) \\ &0 \leqslant v_0 \in W^{1,k}(\bar{\Omega}),\text{对某个 } k > n \\ &0 \leqslant w_0 \in W^{1,k}(\bar{\Omega}),\text{对某个 } k > n \end{aligned} \tag{3}$$

在一些研究 KS 数学模型的报道[4-5]中,发现趋化吸引和排斥现象同时存在,从而产生了有趣的生物斑图[6]。而文献[7]中带 Logistic 源的吸引-排斥趋化模型表明:当空间维数 $n \leqslant 2$ 时,它存在唯一的整体古典解。因此本文的目标是:当 $n \geqslant 3$ 时,证明模型(1)的整体古典解的存在性及有界性。更精确地说,本文获得如下主要结果。

定理 1 假设 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n (n \geqslant 1)$ 是一个光滑有界凸区域,并设 f 满足式(2),则对任意的 u_0, v_0, w_0 满足式(3),存在 $b_0 > 0$,使得当 $b > b_0$ 时,模型(1)存在唯一的非负古典解 (u, v, w),且 u, v, w 在 $\Omega \times (0, \infty)$ 上一致有界。

本文先建立古典解的局部存在性并推导基本的先验估计,接下来再进一步推导解的更高正则性估计,完成定理 1 的证明。

1 局部存在性及基本估计

模型(1)的局部古典解的存在性建立在标准的不动点方法上[8],这里省去其详细的证明过程。

引理 1 假设 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n (n \geqslant 1)$ 是一个光滑有界的区域,并设 f 满足式(2),且 u_0, v_0, w_0 满足式(3),则存在 $T_{\max} \in (0, \infty]$ 和唯一的非负函数组 (u, v, w),且满足

$$\begin{aligned} &u \in C^0(\bar{\Omega} \times [0, T_{\max})) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, T_{\max})) \\ &v \in C^0(\bar{\Omega} \times [0, T_{\max})) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, T_{\max})) \cap L^\infty_{\text{loc}}([0, T_{\max}), w^{1,k}(\Omega)) \\ &w \in C^0(\bar{\Omega} \times [0, T_{\max})) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, T_{\max})) \cap L^\infty_{\text{loc}}([0, T_{\max}), w^{1,k}(\Omega)) \end{aligned}$$

使得 (u, v, w) 是模型(1) 在 $\Omega \times (0, T_{\max})$ 上的古典解。进一步,则有

$$T_{\max} = \infty \text{ 或} \limsup_{t \to \infty} (\| u(\cdot, t) \|_{L^\infty(\Omega)} + \| v(\cdot,t) \|_{W^{1,k}(\Omega)} + \| w(\cdot, t) \|_{W^{1,k}}) = \infty$$

接下来,进行基本的先验估计推导,这些估计将在后面推导 u, ∇v 及 ∇w 的更高正则性先验估计时用到(引理 10 的证明)。

引理 2 假设 f 满足式(2),则存在常数 $A > 0$,使模型(1) 的解 (u, v, w) 满足

$$\int_\Omega u(\cdot,t) \leqslant A,\ \int_\Omega |\nabla v(\cdot,t)|^2 \leqslant A$$
$$\int_\Omega |\nabla w(\cdot,t)|^2 \leqslant A \quad t \in (0, T_{\max}) \tag{4}$$

证明:根据模型(1)中第一个方程,并利用分部积分可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u = \int_\Omega f(u) \leqslant a\int_\Omega u - b\int_\Omega u^2 \tag{5}$$

在式(5)两边同时加上 $\int_\Omega u$,并利用

$$(a+1)\int_\Omega u \leqslant \frac{b}{2}\int_\Omega u^2 + \frac{(a+1)^2}{2b} \cdot |\Omega|,\text{得}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u + \int_\Omega u \leqslant -\frac{b}{2}\int_\Omega u^2 + \frac{(a+1)^2}{2b} \cdot |\Omega| \tag{6}$$

模型(1)中第二个方程两边同时乘以 $-\Delta v$,并借助分部积分和 Young 不等式得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega |\nabla v|^2 + \alpha_1\int_\Omega |\nabla v|^2 =$$
$$-\beta\int_\Omega u\Delta v \leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 + \frac{\beta_1^2}{2}\int_\Omega u^2,\ t \in (0, T_{\max})$$

从而有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega |\nabla v|^2 + 2\alpha_1\int_\Omega |\nabla v|^2 \leqslant$$

$$\beta_1^2\int_\Omega u^2,\ t\in(0,\ T_{\max})\tag{7}$$

同理有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla w|^2+\int_\Omega|\nabla w|^2+2\alpha_2\int_\Omega|\nabla w|^2\leqslant\beta_2^2\int_\Omega u^2,\ t\in(0,\ T_{\max})\tag{8}$$

由此推得

$y(t):=\dfrac{2(\beta_1^2+\beta_2^2)}{b}\int_\Omega u+\int_\Omega|\nabla v|^2+\int_\Omega|\nabla w|^2$，$t\in(0,\ T_{\max})$ 满足常微分不等式

$$y'(t)+c_1y(t)\leqslant c_2,\ t\in(0,\ T_{\max}),$$

其中，$c_1:=\min\{1,\ 2\alpha_1,\ 2\alpha_2\}$，$c_2:=\dfrac{(a+1)^2(\beta_1^2+\beta_2^2)|\Omega|}{b^2}$。直接解此 Gronwall 不等式得

$$y(t)\leqslant\max\left\{\frac{c_2}{c_1},y(0)\right\},\ t\in(0,\ T_{\max})$$

结合 y 的定义，得出式(4)。从而引理 2 得证。

2　高阶正则性估计

本节的目标是对充分大的 $p>1$ 建立 $\int_\Omega u^p$，$\int_\Omega|\nabla v|^{2p}$ 及 $\int_\Omega|\nabla w|^{2p}$ 的先验估计。为此，对任意的 $p\in\mathbf{N}$ 和 $q\in(0,\ \cdots,\ p)$，先考察有关 $\int_\Omega u^q|\nabla v|^{2p-2q}$ 的微分不等式。

引理 3　假设 f 满足式(2)，则对于所有的 $p\in\mathbf{N}$ 和 $q\in\{0,\ \cdots,\ p\}$，成立

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^q|\nabla v|^{2p-2q}+q(q-1)\int_\Omega u^{q-2}|\nabla u|^2|\nabla v|^{2p-2q}+2(p-q)\int_\Omega u^q|\nabla v|^{2p-2q-2}|D^2v|^2+\\&(p-q)(p-q-1)\int_\Omega u^q|\nabla v|^{2p-2q-4}|\nabla|\nabla v|^2|^2+\frac{qb}{2}\int_\Omega u^{q+1}|\nabla v|^{2p-2q}\leqslant\\&2(p-q)\beta_1\int_\Omega u^q|\nabla v|^{2p-2q-2}\nabla u\cdot\nabla v-2q(p-q)\int_\Omega u^{q-1}|\nabla v|^{2p-2q-2}\nabla u\cdot\nabla|\nabla v|^2+\\&q(q-1)\chi\int_\Omega u^{q-1}|\nabla v|^{2p-2q}\nabla u\cdot\nabla v+q(p-q)\chi\int_\Omega u^q|\nabla v|^{2p-2q-2}\nabla v\cdot\nabla|\nabla v|^2-\\&q(q-1)\zeta\int_\Omega u^{q-1}|\nabla v|^{2p-2q}\nabla u\cdot\nabla w-q(p-q)\zeta\int_\Omega u^q|\nabla v|^{2p-2q-2}\nabla w\cdot\nabla|\nabla v|^2+\\&\frac{qa^2}{2b}\int_\Omega u^{q-1}|\nabla v|^{2p-2q},\ t\in(0,\ T_{\max})\end{aligned}\tag{9}$$

证明：直接计算得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^q|\nabla v|^{2p-2q}=q\int_\Omega u^{q-1}|\nabla v|^{2p-2q}u_t+2(p-q)\int_\Omega u^q|\nabla v|^{2p-2q-2}\nabla v\cdot\nabla v_t=\\&q\int_\Omega u^{q-1}|\nabla v|^{2p-2q}\Delta u-q\chi\int_\Omega u^{q-1}|\nabla v|^{2p-2q}\nabla\cdot(u\nabla v)+\\&q\zeta\int_\Omega u^{q-1}|\nabla v|^{2p-2q}\nabla\cdot(u\nabla w)+q\int_\Omega u^{q-1}|\nabla v|^{2p-2q}f(u)+\\&2(p-q)\int_\Omega u^q|\nabla v|^{2p-2q-2}\nabla v\cdot\nabla\Delta v-2(p-q)\alpha_1\int_\Omega u^q|\nabla v|^{2p-2q}+\\&2(p-q)\beta_1\int_\Omega u^q|\nabla v|^{2p-2q-2}\nabla v\cdot\nabla u\\&:=I_1+I_2+\cdots+I_7\end{aligned}\tag{10}$$

由分部积分知

$$I_1\leqslant-q(q-1)\int_\Omega u^{q-2}|\nabla u|^2|\nabla v|^{2p-2q}-q(p-q)\int_\Omega u^{q-1}|\nabla v|^{2p-2q-2}\nabla u\cdot\nabla|\nabla v|^2\tag{11}$$

$$I_2\leqslant q(q-1)\chi\int_\Omega u^{q-1}|\nabla v|^{2p-2q}\nabla u\cdot\nabla v+q(p-q)\chi\int_\Omega u^q|\nabla v|^{2p-2q-2}\nabla v\cdot\nabla|\nabla v|^2\tag{12}$$

且

$$I_3 \leqslant -q(q-1)\zeta\int_\Omega u^{q-1} |\nabla v|^{2p-2q} \nabla u \cdot \nabla w - q(p-q)\zeta\int_\Omega u^q |\nabla v|^{2p-2q-2} \nabla w \cdot \nabla |\nabla v|^2 \quad (13)$$

其中，$t \in (0, T_{\max})$。接下来用 Young 不等式处理 I_4 得

$$I_4 \leqslant qa\int_\Omega u^q |\nabla v|^{2p-2q} - qb\int_\Omega u^{q+1} |\nabla v|^{2p-2q} \leqslant \frac{qa^2}{2b}\int_\Omega u^{q-1} |\nabla v|^{2p-2q} - \frac{qb}{2}\int_\Omega u^{q+1} |\nabla v|^{2p-2q} \quad (14)$$

现在估计 I_5，根据恒等式$\nabla v \cdot \nabla \Delta v = \frac{1}{2}\Delta|\nabla v|^2 - |D^2 v|^2$ 和分部积分得

$$\begin{aligned} I_5 = {} & (p-q)\int_\Omega u^q |\nabla v|^{2p-2q-2} \Delta |\nabla v|^2 - 2(p-q)\int_\Omega u^q |\nabla v|^{2p-2q-2} |D^2 v|^2 = \\ & -q(p-q)\int_\Omega u^{q-1} |\nabla v|^{2p-2q-2} \nabla u \cdot \nabla |\nabla v|^2 - \\ & (p-q)(p-q-1)\int_\Omega u^q |\nabla v|^{2p-2q-4} |\nabla |\nabla v|^2|^2 + \\ & (p-q)\int_{\partial\Omega} u^q |\nabla v|^{2p-2q-2} \frac{\partial |\nabla v|^2}{\partial \upsilon} - 2(p-q)\int_\Omega u^q |\nabla v|^{2p-2q-2} |D^2 v|^2 \end{aligned} \quad (15)$$

由 Ω 的凸性及在 $\partial\Omega$ 上$\frac{\partial v}{\partial \upsilon} = 0$，可以推出在 $\partial\Omega$ 上$\frac{\partial |\nabla v|^2}{\partial \upsilon} \leqslant 0$[9]，从而 $I_5 \leqslant 0$，根据恒等式(10)并结合式(11)～(15)，很容易推出式(9)，从而引理3得证。

同理，也能推得有关$\int_\Omega u^q |\nabla w|^{2p-2q}$，其中 $p \in \mathbf{N}$ 及 $q \in \{0, \cdots, p\}$ 的微分不等式。因此得到推论4。

推论4 假设 f 满足式(2)，则对于所有的 $p \in \mathbf{N}$ 和 $q \in \{0, \cdots, p\}$，成立

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\int_\Omega u^q |\nabla v|^{2p-2q} + \int_\Omega u^q |\nabla w|^{2p-2q}\right\} + q(q-1)\int_\Omega u^{q-2} |\nabla u|^2 |\nabla v|^{2p-2q} + \\ & 2(p-q)\int_\Omega u^q |\nabla v|^{2p-2q-2} |D^2 v|^2 + \\ & (p-q)(p-q-1)\int_\Omega u^q |\nabla v|^{2p-2q-4} |\nabla |\nabla v|^2|^2 + \frac{qb}{2}\int_\Omega u^{q+1} |\nabla v|^{2p-2q} + \\ & q(q-1)\int_\Omega u^{q-2} |\nabla u|^2 |\nabla w|^{2p-2q} + 2(p-q)\int_\Omega u^q |\nabla w|^{2p-2q-2} |D^2 w|^2 + \\ & (p-q)(p-q-1)\int_\Omega u^q |\nabla w|^{2p-2q-4} |\nabla |\nabla w|^2|^2 + \frac{qb}{2}\int_\Omega u^{q+1} |\nabla w|^{2p-2q} \leqslant \\ & 2(p-q)\beta_1\int_\Omega u^q |\nabla v|^{2p-2q-2} \nabla u \cdot \nabla v - 2q(p-q)\int_\Omega u^{q-1} |\nabla v|^{2p-2q-2} \nabla u \cdot \nabla |\nabla v|^2 + \\ & q(q-1)\chi\int_\Omega u^{q-1} |\nabla v|^{2p-2q} \nabla u \cdot \nabla v + q(p-q)\chi\int_\Omega u^q |\nabla v|^{2p-2q-2} \nabla v \cdot \nabla |\nabla v|^2 - \\ & q(q-1)\zeta\int_\Omega u^{q-1} |\nabla v|^{2p-2q} \nabla u \cdot \nabla w + \frac{qa^2}{2b}\int_\Omega u^{q-1} |\nabla v|^{2p-2q} - \\ & q(p-q)\zeta\int_\Omega u^q |\nabla v|^{2p-2q-2} \nabla w \cdot \nabla |\nabla v|^2 + \\ & 2(p-q)\beta_2\int_\Omega u^q |\nabla w|^{2p-2q-2} \nabla u \cdot \nabla w - 2q(p-q)\int_\Omega u^{q-1} |\nabla w|^{2p-2q-2} \nabla u \cdot \nabla |\nabla w|^2 + \\ & q(q-1)\chi\int_\Omega u^{q-1} |\nabla w|^{2p-2q} \nabla u \cdot \nabla v + q(p-q)\chi\int_\Omega u^q |\nabla w|^{2p-2q-2} \nabla v \cdot \nabla |\nabla w|^2 - \\ & q(q-1)\zeta\int_\Omega u^{q-1} |\nabla w|^{2p-2q} \nabla u \cdot \nabla w + \frac{qa^2}{2b}\int_\Omega u^{q-1} |\nabla w|^{2p-2q} - \\ & q(p-q)\zeta\int_\Omega u^q |\nabla w|^{2p-2q-2} \nabla w \cdot \nabla |\nabla w|^2,\ t \in (0, T_{\max}) \end{aligned} \quad (16)$$

证明：根据引理3的证明方法，类似推得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^q|\nabla w|^{2p-2q}+q(q-1)\int_\Omega u^{q-2}|\nabla u|^2|\nabla w|^{2p-2q}+2(p-q)\int_\Omega u^q|\nabla w|^{2p-2q-2}|D^2w|^2+$$
$$(p-q)(p-q-1)\int_\Omega u^q|\nabla w|^{2p-2q-4}|\nabla|\nabla w|^2|^2+\frac{qb}{2}\int_\Omega u^{q+1}|\nabla w|^{2p-2q}\leqslant$$
$$2(p-q)\beta_2\int_\Omega u^q|\nabla w|^{2p-2q-2}\nabla u\cdot\nabla w-2q(p-q)\int_\Omega u^{q-1}|\nabla w|^{2p-2q-2}\nabla u\cdot\nabla|\nabla w|^2+$$
$$q(q-1)\chi\int_\Omega u^{q-1}|\nabla w|^{2p-2q}\nabla u\cdot\nabla v+q(p-q)\chi\int_\Omega u^q|\nabla w|^{2p-2q-2}\nabla v\cdot\nabla|\nabla w|^2-$$
$$q(q-1)\zeta\int_\Omega u^{q-1}|\nabla w|^{2p-2q}\nabla u\cdot\nabla w-q(p-q)\zeta\int_\Omega u^q|\nabla w|^{2p-2q-2}\nabla w\cdot\nabla|\nabla w|^2+$$
$$\frac{qa^2}{2b}\int_\Omega u^{q-1}|\nabla w|^{2p-2q},\ t\in(0,T_{\max})\tag{17}$$

结合式(9)，即可推出式(16)，从而推论 4 得证。

为了估计$\int_\Omega|\nabla v|^{2p}$和$\int_\Omega|\nabla w|^{2p}$，在式(16)中取$q=0$，并在此特殊情形下进一步优化式(16)右端项的估计。

引理 5　假设f满足式(2)，则对所有的$p\in\mathbf{N}$，$p\geqslant2$，存在$c_0>0$和$C_0>0$，使模型(1)的解具有下述性质

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\int_\Omega|\nabla v|^{2p}+\int_\Omega|\nabla w|^{2p}\right\}+c_0\int_\Omega|\nabla v|^{2p-4}|\nabla|\nabla v|^2|+c_0\int_\Omega|\nabla w|^{2p-4}|\nabla|\nabla w|^2|\leqslant$$
$$C_0\int_\Omega u^2|\nabla v|^{2p-2}+C_0\int_\Omega u^2|\nabla w|^{2p-2},\ t\in(0,T_{\max})\tag{18}$$

证明：式(16)中取$q=0$，利用分部积分和 Young 不等式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla v|^{2p}+2p\int_\Omega|\nabla v|^{2p-2}|D^2v|^2+p(p-1)\int_\Omega|\nabla v|^{2p-4}|\nabla|\nabla v|^2|^2\leqslant$$
$$2p\beta_1\int_\Omega|\nabla v|^{2p-2}\nabla u\cdot\nabla v=$$
$$-2p(p-1)\beta_1\int_\Omega u|\nabla v|^{2p-4}\nabla v\cdot\nabla|\nabla v|^2-2p\beta_1\int_\Omega u|\nabla v|^{2p-2}\Delta v\leqslant$$
$$\frac{p(p-1)}{2}\int_\Omega|\nabla v|^{2p-4}|\nabla|\nabla v|^2|^2+2p(p-1)\beta_1^2\int_\Omega u^2|\nabla v|^{2p-2}+$$
$$\frac{2p}{n}\int_\Omega|\nabla v|^{2p-2}|\nabla v|^2+\frac{pn\beta_1^2}{2}\int_\Omega u^2|\nabla v|^{2p-2},\ t\in(0,T_{\max})$$

再根据$|\nabla v|^2\leqslant n|D^2v|^2$得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla v|^{2p}+\frac{p(p-1)}{2}\int_\Omega|\nabla v|^{2p-4}|\nabla|\nabla v|^2|^2\leqslant\left(2p(p-1)+\frac{pn}{2}\right)\beta_1^2\int_\Omega u^2|\nabla v|^{2p-2}\tag{19}$$

同理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla w|^{2p}+\frac{p(p-1)}{2}\int_\Omega|\nabla w|^{2p-4}|\nabla|\nabla w|^2|^2\leqslant\left(2p(p-1)+\frac{pn}{2}\right)\beta_2^2\int_\Omega u^2|\nabla w|^{2p-2}\tag{20}$$

定义$c_0:=\frac{p(p-1)}{2}$，$C_0:=\max\left\{\left(2p(p-1)+\frac{np}{2}\right)\beta_1^2,\left(2p(p-1)+\frac{np}{2}\right)\beta_2^2\right\}$，则由式(19)和(20)很容易得到式(18)，从而引理 5 得证。

为了处理式(18)中右端 2 个积分$\int_\Omega u^2|\nabla v|^{2p-2}$及$\int_\Omega u^2|\nabla w|^{2p-2}$，则需要进一步研究有关$\int_\Omega u|\nabla v|^{2p-2}$和$\int_\Omega u|\nabla w|^{2p-2}$的微分不等式。为此，需要在式(16)中取$q=1$，并在此情形下，对式(16)右端项做进一步的估计。

引理 6　若$p\in\mathbf{N}$，$p\geqslant3$且引理 1 的假设成立，则存在常数C_1使得模型(1)的解满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\int_\Omega u\,|\nabla v|^{2p-2}+\int_\Omega u\,|\nabla w|^{2p-2}\right\}+\left(\frac{b}{2}-C_1\right)\int_\Omega u^2\,|\nabla v|^{2p-2}+\left(\frac{b}{2}-C_1\right)\int_\Omega u^2\,|\nabla w|^{2p-2}\leqslant$$
$$\int_\Omega|\nabla u|^2\,|\nabla v|^{2p-4}+C_1\int_\Omega|\nabla v|^{2p-4}\,|\nabla|\nabla v|^2|^2+C_1\int_\Omega|\nabla v|^{2p-2}+C_1\int_\Omega|\nabla w|^{2p-2}+$$
$$\int_\Omega|\nabla u|^2\,|\nabla w|^{2p-4}+C_1\int_\Omega|\nabla w|^{2p-4}\,|\nabla|\nabla w|^2|^2,\ t\in(0,T_{\max})\tag{21}$$

证明:令式(16)中 $q=1$ 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u\,|\nabla v|^{2p-2}+2(p-1)\int_\Omega u\,|\nabla v|^{2p-4}\,|D^2v|^2+(p-1)(p-2)\cdot$$
$$\int_\Omega u\,|\nabla v|^{2p-6}\,|\nabla|\nabla v|^2|^2+\frac{b}{2}\int_\Omega u^2\,|\nabla v|^{2p-2}\leqslant 2(p-1)\beta_1\int_\Omega u\,|\nabla v|^{2p-4}\,\nabla u\cdot$$
$$\nabla v-2(p-1)\int_\Omega|\nabla v|^{2p-4}\,\nabla u\cdot\nabla|\nabla v|^2+(p-1)\chi\int_\Omega u\,|\nabla v|^{2p-4}\,\nabla v\cdot\nabla|\nabla v|^2-$$
$$(p-1)\zeta\int_\Omega u\,|\nabla v|^{2p-4}\,\nabla w\cdot\nabla|\nabla v|^2+\frac{a^2}{2b}\int_\Omega|\nabla v|^{2p-2}$$
$$:=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5,\ t\in(0,T_{\max})\tag{22}$$

利用 Young 不等式估计得

$$I_1\leqslant\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\,|\nabla v|^{2p-4}+2\,(p-1)^2\beta_1^2\int_\Omega u^2\,|\nabla v|^{2p-2}\tag{23}$$

$$I_2\leqslant\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\,|\nabla v|^{2p-4}+2\,(p-1)^2\int_\Omega|\nabla v|^{2p-4}\,|\nabla|\nabla v|^2|^2\tag{24}$$

$$I_3\leqslant\int_\Omega|\nabla v|^{2p-4}\,|\nabla|\nabla v|^2|^2+\frac{1}{4}\,(p-1)^2\chi^2\int_\Omega u^2\,|\nabla v|^{2p-2}\tag{25}$$

$$I_4\leqslant\int_\Omega|\nabla v|^{2p-4}\,|\nabla|\nabla v|^2|^2+\frac{1}{4}\,(p-1)^2\zeta^2\int_\Omega u^2\,|\nabla v|^{2p-4}\,|\nabla w|^2\tag{26}$$

其中, $t\in(0,T_{\max})$。**再次使用 Young 不等式估计式**(26)**的最后一项得**

$$\frac{(p-1)^2\zeta^2}{4}\int_\Omega u^2\,|\nabla v|^{2p-4}\,|\nabla w|^2=\frac{(p-1)^2\zeta^2}{4}\int_\Omega(u^2\,|\nabla v|^{2p-2})^{\frac{p-2}{p-1}}\cdot(u^2\,|\nabla w|^{2p-2})^{\frac{1}{p-1}}\leqslant$$
$$\frac{(p-1)^2\zeta^2}{4}\cdot\frac{p-2}{p-1}\int_\Omega u^2\,|\nabla v|^{2p-2}+\frac{(p-1)^2\zeta^2}{4}\cdot\frac{1}{p-1}\int_\Omega u^2\,|\nabla w|^{2p-2}$$

综合式(22)~(26)**推出**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u\,|\nabla v|^{2p-2}+\left(\frac{b}{2}-2\,(p-1)^2\beta_1^2-\frac{(p-1)^2\chi^2}{4}-\frac{(p-1)^2\zeta^2}{4}\cdot\frac{p-2}{p-1}\right)\int_\Omega u^2\,|\nabla v|^{2p-2}\leqslant$$
$$\int_\Omega|\nabla u|^2\,|\nabla v|^{2p-4}+2((p-1)^2+1)\int_\Omega|\nabla v|^{2p-4}\,|\nabla|\nabla v|^2|^2+$$
$$\frac{(p-1)^2\zeta^2}{4}\cdot\frac{1}{p-1}\int_\Omega u^2\,|\nabla w|^{2p-2}+\frac{a^2}{2b}\int_\Omega|\nabla v|^{2p-2},\ t\in(0,T_{\max})\tag{27}$$

同理可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u\,|\nabla w|^{2p-2}+\left(\frac{b}{2}-2\,(p-1)^2\beta_2^2-\frac{(p-1)^2\chi^2}{4}-\frac{(p-1)^2\zeta^2}{4}\cdot\frac{p-2}{p-1}\right)\int_\Omega u^2\,|\nabla w|^{2p-2}\leqslant$$
$$\int_\Omega|\nabla u|^2\,|\nabla w|^{2p-4}+2((p-1)^2+1)\int_\Omega|\nabla w|^{2p-4}\,|\nabla|\nabla w|^2|^2+$$
$$\frac{(p-1)^2\zeta^2}{4}\,\frac{1}{p-1}\int_\Omega u^2\,|\nabla v|^{2p-2}+\frac{a^2}{2b}\int_\Omega|\nabla w|^{2p-2},\ t\in(0,T_{\max})\tag{28}$$

令

$$C_1:=\max\Big\{2(p-1)^2\beta_1^2+\frac{(p-1)^2\chi^2}{4}+\frac{(p-1)^2\zeta^2}{4}\cdot\frac{p-2}{p-1}+\frac{(p-1)^2\zeta^2}{4}\cdot\frac{1}{p-1},$$
$$2(p-1)^2\beta_2^2+\frac{(p-1)^2\chi^2}{4}+\frac{(p-1)^2\zeta^2}{4}\cdot\frac{p-2}{p-1}+\frac{(p-1)^2\zeta^2}{4}\cdot\frac{1}{p-1},\ 2((p-1)^2+1),\frac{a^2}{2b}\Big\}$$

结合式(27)和(28),即推出式(21),从而引理6得证。

为了处理式(21)中的右端项,需要在式(16)中考察 $q\geqslant 2$ 的情形且要对式(16)右端项作进一步的处理,更精确地说,有如下引理7。

引理7　假设 f 满足式(2),则对所有的 $p\in\mathbf{N}$, $p\geqslant 3$ 和每个 $q\in\{2,\cdots,p-1\}$,存在 $c_q\geqslant 0$ 和 $C_q\geqslant 0$,使模型(1)的解满足

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{\int_\Omega u^q|\nabla v|^{2p-2q}+\int_\Omega u^q|\nabla w|^{2p-2q}\Big\}+c_q\int_\Omega u^{q-2}|\nabla u|^2|\nabla v|^{2p-2q}+\\&\Big(\frac{qb}{2}-C_q\Big)\int_\Omega u^{q+1}|\nabla v|^{2p-2q}+c_q\int_\Omega u^{q-2}|\nabla u|^2|\nabla w|^{2p-2q}+\\&\Big(\frac{qb}{2}-C_q\Big)\int_\Omega u^{q+1}|\nabla w|^{2p-2q}\leqslant\int_\Omega u^{q-1}|\nabla u|^2|\nabla v|^{2p-2q-2}+C_q\int_\Omega u^2|\nabla v|^{2p-2}+\\&C_q\int_\Omega|\nabla v|^{2p-4}|\nabla|\nabla v|^2|^2+C_q\int_\Omega|\nabla v|^{2p-2}+\\&\int_\Omega u^{q-1}|\nabla u|^2|\nabla w|^{2p-2q-2}+C_q\int_\Omega u^2|\nabla w|^{2p-2}+\\&C_q\int_\Omega|\nabla w|^{2p-4}|\nabla|\nabla w|^2|^2+C_q\int_\Omega|\nabla w|^{2p-2}+C_q,\ t\in(0,T_{\max})\end{aligned}\tag{29}$$

证明:利用 Young 不等式估计式(9)左边的第一项和最后一项得

$$\begin{aligned}I_1:=&2(p-q)\beta_1\int_\Omega u^q|\nabla v|^{2p-2q-2}\nabla u\cdot\nabla v\leqslant\\&\frac{1}{2}\int_\Omega u^{q-1}|\nabla u|^2|\nabla v|^{2p-2q-2}+2(p-q)^2\beta_1^2\int_\Omega u^{q+1}|\nabla v|^{2p-2q},\end{aligned}\tag{30}$$

$$\begin{aligned}I_7:=&\frac{qa^2}{2b}\int_\Omega u^{q-1}|\nabla v|^{2p-2q}\leqslant\\&\frac{qa^2}{2b}\cdot\frac{q-1}{q+1}\int_\Omega u^{q+1}|\nabla v|^{2p-2q}+\frac{qa^2}{b}\cdot\frac{1}{q+1}\int_\Omega|\nabla v|^{2p-2q}\leqslant\\&\frac{qa^2}{2b}\cdot\frac{q-1}{q+1}\int_\Omega u^{q+1}|\nabla v|^{2p-2q}+\frac{qa^2}{(q+1)b}\cdot\frac{p-q}{p-1}\int_\Omega|\nabla v|^{2p-2}+\frac{q(q-1)a^2}{(q+1)b(p-1)}|\Omega|\end{aligned}\tag{31}$$

再一次根据 Young 不等式得

$$\begin{aligned}I_2\leqslant&\frac{1}{2}\int_\Omega u^{q-1}|\nabla u|^2|\nabla v|^{2p-2q-2}+2q^2(p-q)^2\int_\Omega u^{q-1}|\nabla v|^{2p-2q-2}|\nabla|\nabla v|^2|^2\leqslant\\&\frac{1}{2}\int_\Omega u^{q-1}|\nabla u|^2|\nabla v|^{2p-2q-2}+\frac{p-q}{4}\int_\Omega u^q|\nabla v|^{2p-2q-4}|\nabla|\nabla v|^2|^2+\\&c'\int_\Omega|\nabla v|^{2p-4}|\nabla|\nabla v|^2|^2\end{aligned}\tag{32}$$

其中,常数 $c'>0$。同理有

$$I_3\leqslant\frac{q(q-1)}{4}\int_\Omega u^{q-2}|\nabla u|^2|\nabla v|^{2p-2q}+q(q-1)\chi^2\int_\Omega u^q|\nabla v|^{2p-2q+2}\tag{33}$$

$$I_4\leqslant\frac{p-q}{8}\int_\Omega u^q|\nabla v|^{2p-2q-4}|\nabla|\nabla v|^2|^2+2q^2(p-q)\chi^2\int_\Omega u^q|\nabla v|^{2p-2q+2}\tag{34}$$

$$I_5\leqslant\frac{q(q-1)}{4}\int_\Omega u^{q-2}|\nabla u|^2|\nabla v|^{2p-2q}+q(q-1)\zeta^2\int_\Omega u^q|\nabla v|^{2p-2q}|\nabla w|^2\tag{35}$$

$$I_6 \leqslant \frac{p-q}{8}\int_\Omega u^q \mid \nabla v\mid^{2p-2q-4} \mid \nabla \mid \nabla v\mid^2 \mid^2 + 2q^2(p-q)\zeta^2\int_\Omega u^q \mid \nabla v\mid^{2p-2q} \mid \nabla w\mid^2 \tag{36}$$

其中,$t\in(0,T_{\max})$。进一步由 Young 不等式得

$$\int_\Omega u^q \mid \nabla v\mid^{2p-2q} \mid \nabla w\mid^2 \leqslant \frac{p-q}{p-q+1}\int_\Omega u^q \mid \nabla v\mid^{2p-2q+2} + \frac{1}{p-q+1}\int_\Omega u^q \mid \nabla w\mid^{2p-2q+2} \tag{37}$$

$$\int_\Omega u^q \mid \nabla v\mid^{2p-2q+2} \leqslant \frac{1}{q-1}\int_\Omega u^2 \mid \nabla v\mid^{2p-2} + \frac{q-2}{q-1}\int_\Omega u^{q+1} \mid \nabla v\mid^{2p-2q} \tag{38}$$

$$\int_\Omega u^q \mid \nabla v\mid^{2p-2q+2} \leqslant \frac{1}{q-1}\int_\Omega u^2 \mid \nabla w\mid^{2p-2} + \frac{q-2}{q-1}\int_\Omega u^{q+1} \mid \nabla w\mid^{2p-2q} \tag{39}$$

其中,$t\in(0,T_{\max})$。利用恒等式 $\mid\nabla\mid\nabla v\mid^2\mid^2 = \mid 2D^2v\cdot\nabla v\mid^2 \leqslant 4\mid D^2v\mid^2\cdot\mid\nabla v\mid^2$ 得

$$\int_\Omega u^q \mid \nabla v\mid^{2p-2q-4} \mid \nabla \mid \nabla v\mid^2 \mid^2 \leqslant 4\int_\Omega u^q \mid \nabla v\mid^{2p-2q-2} \mid D^2 v\mid^2 \tag{40}$$

综合式(9)和(30)~(40)得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^q \mid\nabla v\mid^{2p-2q} + \Big(\frac{qb}{2} - 2(p-q)^2\beta_1^2 - q(q-2)\chi^2 - \frac{q(q-1)a^2}{2(q+1)b} - \\
&\frac{2q^2(p-q)(q-2)\chi^2}{q-1} - \frac{q(p-q)(q-2)\zeta^2}{p-q+1} - \frac{2q^2(q-2)(p-q)^2\zeta^2}{(p-q+1)(q-1)}\Big)\int_\Omega u^{q+1}\mid\nabla v\mid^{2p-2q} + \\
&\frac{q(q-1)}{2}\int_\Omega u^{q-2}\mid\nabla u\mid^2\mid\nabla v\mid^{2p-2q} \leqslant \int_\Omega u^{q-1}\mid\nabla u\mid^2\mid\nabla v\mid^{2p-2q-2} + \\
&\Big(q\chi^2 + \frac{2q^2(p-q)\chi^2}{q-1} + \frac{q(p-q)\zeta^2}{p-q+1} + \frac{2q^2(p-q)^2\zeta^2}{(p-q+1)(q-1)}\Big)\int_\Omega u^2\mid\nabla v\mid^{2p-2} + \\
&c'\int_\Omega \mid\nabla v\mid^{2p-4}\mid\nabla\mid\nabla v\mid^2\mid^2 + \frac{q(p-q)a^2}{(p-1)(q+1)b}\int_\Omega \mid\nabla v\mid^{2p-2} + \frac{q(q-1)a^2\mid\Omega\mid}{(p-1)(q+1)b} + \\
&\Big(\frac{q\zeta^2}{p-q+1} + \frac{2q^2(p-q)\zeta^2}{(p-q+1)(q-1)}\Big)\int_\Omega u^2\mid\nabla w\mid^{2p-2} + \\
&\Big(\frac{q(q-2)\zeta^2}{p-q+1} + \frac{2q^2(q-2)(p-q)\zeta^2}{(p-q+1)(q-1)}\Big)\int_\Omega u^{q+1}\mid\nabla w\mid^{2p-2q},\ t\in(0,T_{\max})。
\end{aligned} \tag{41}$$

同理

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^q \mid\nabla w\mid^{2p-2q} + \Big(\frac{qb}{2} - 2(p-q)^2\beta_2^2 - q(q-2)\chi^2 - \frac{q(q-1)a^2}{2(q+1)b} - \\
&\frac{2q^2(p-q)(q-2)\chi^2}{q-1} - \frac{q(p-q)(q-2)\zeta^2}{p-q+1} - \frac{2q^2(q-2)(p-q)^2\zeta^2}{(p-q+1)(q-1)}\Big)\int_\Omega u^{q+1}\mid\nabla w\mid^{2p-2q} + \\
&\frac{q(q-1)}{2}\int_\Omega u^{q-2}\mid\nabla u\mid^2\mid\nabla w\mid^{2p-2q} \leqslant \int_\Omega u^{q-1}\mid\nabla u\mid^2\mid\nabla w\mid^{2p-2q-2} + \\
&\Big(q\chi^2 + \frac{2q^2(p-q)\chi^2}{q-1} + \frac{q(p-q)\zeta^2}{p-q+1} + \frac{2q^2(p-q)^2\zeta^2}{(p-q+1)(q-1)}\Big)\int_\Omega u^2\mid\nabla w\mid^{2p-2} + \\
&c'\int_\Omega \mid\nabla w\mid^{2p-4}\mid\nabla\mid\nabla w\mid^2\mid^2 + \frac{q(p-q)a^2}{(p-1)(q+1)b}\int_\Omega \mid\nabla w\mid^{2p-2} + \frac{q(q-1)a^2\mid\Omega\mid}{(p-1)(q+1)b} + \\
&\Big(\frac{q\zeta^2}{p-q+1} + \frac{2q^2(p-q)\zeta^2}{(p-q+1)(q-1)}\Big)\int_\Omega u^2\mid\nabla v\mid^{2p-2} + \\
&\Big(\frac{q(q-2)\zeta^2}{p-q+1} + \frac{2q^2(q-2)(p-q)\zeta^2}{(p-q+1)(q-1)}\Big)\int_\Omega u^{q+1}\mid\nabla v\mid^{2p-2q},\ t\in(0,T_{\max})
\end{aligned} \tag{42}$$

因此,由式(41)和(42)得式(29),从而引理7得证。

为了建立 $\int_\Omega u^p$ 的先验估计,在式(16)中取 $p=q$ 得到如下的引理8。

引理8 假设 f 满足式(2),则对所有的 $p\in\mathbb{N}$, $p\geqslant 2$,存在 c_p 和 C_p 使模型(1)的解满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^p + c_p\int_\Omega u^{p-2}|\nabla u|^2 + \left(\frac{pb}{2} - C_p\right)\int_\Omega u^{p+1} \leqslant$$
$$C_p\int_\Omega u^2|\nabla v|^{2p-2} + C_p\int_\Omega u^2|\nabla w|^{2p-2} + C_p,\ t\in(0,\ T_{\max}) \tag{43}$$

证明:式(16)**中取** $p=q$ **得**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^p + p(p-1)\int_\Omega u^{p-2}|\nabla u|^2 + \frac{pb}{2}\int_\Omega u^{p+1} \leqslant$$
$$p(p-1)\chi\int_\Omega u^{p-1}\nabla u\cdot\nabla v - p(p-1)\zeta\int_\Omega u^{p-1}\nabla u\cdot\nabla w +$$
$$\frac{pa^2}{2b}\int_\Omega u^{p-1},\ t\in(0,\ T_{\max}) \tag{44}$$

进一步根据 Young **不等式得**

$$p(p-1)\chi\int_\Omega u^{p-1}\nabla u\cdot\nabla v \leqslant$$
$$\frac{p(p-1)}{4}\int_\Omega u^{p-2}|\nabla u|^2 + p(p-1)\chi^2\int_\Omega u^p|\nabla v|^2 \leqslant$$
$$\frac{p(p-1)}{4}\int_\Omega u^{p-2}|\nabla u|^2 + p\chi^2(p-2)\int_\Omega u^{p+1} +$$
$$p\chi^2\int_\Omega u^2|\nabla v|^{2p-2},\ t\in(0,\ T_{\max}) \tag{45}$$

同理

$$-p(p-1)\zeta\int_\Omega u^{p-1}\nabla u\cdot\nabla w \leqslant$$
$$\frac{p(p-1)}{4}\int_\Omega u^{p-2}|\nabla u|^2 + p(p-2)\zeta^2\int_\Omega u^{p+1} +$$
$$p\zeta^2\int_\Omega u^2|\nabla w|^{2p-2},\ t\in(0,\ T_{\max}) \tag{46}$$

再利用 Young **不等式得**

$$\frac{pa^2}{2b}\int_\Omega u^{p-1} \leqslant \frac{pa^2}{2b}\cdot\frac{p-1}{p+1}\int_\Omega u^{p+1} +$$
$$\frac{pa^2}{b}\cdot\frac{1}{p+1}|\Omega|,\ t\in(0,\ T_{\max}) \tag{47}$$

综合式(45)～(47)**得**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^p + \left(\frac{qb}{2} - p(p-2)\chi^2 - p(p-2)\zeta^2 -\right.$$
$$\left.\frac{p(p-1)a^2}{2(p+1)b}\right)\int_\Omega u^{p+1} + \frac{p(p-1)}{2}\int_\Omega u^{p-2}|\nabla u|^2 \leqslant$$
$$p\chi^2\int_\Omega u^2|\nabla v|^{2p-2} + p\zeta^2\int_\Omega u^2|\nabla w|^{2p-2} +$$
$$\frac{pa^2}{b(p+1)}|\Omega|,\ t\in(0,\ T_{\max}) \tag{48}$$

由式(48)**很容易得出式**(43),**从而引理** 8 **得证。**

为了能用引理 5～8 **所得到的估计中"左端的好项"来控制"相应的右端的积分项",将这些估计式进行合适的线性组合,得到如下引理** 9。

引理 9　假设 $p\in\mathbf{N}$, $p\geqslant 3$ **且引理** 1 **中假设成立,则存在** $b_0=b_0(a,\ b,\ \chi,\ \zeta,\ \beta_1,\ \beta_2,\ p,\ n)$,**对任意的** $b>b_0(>0)$,**存在正数** c,C **及** $d_0,\ \cdots,\ d_p$,**使模型**(1)**的解满足**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\sum_{q=0}^{p}d_q\cdot\int_\Omega u^q|\nabla v|^{2p-2q} + \sum_{q=0}^{p}d_q\cdot\int_\Omega u^q|\nabla w|^{2p-2q}\right\} + c\int_\Omega|\nabla v|^{2p-4}|\nabla|\nabla v|^2|^2 +$$
$$c\int_\Omega|\nabla w|^{2p-4}|\nabla|\nabla w|^2|^2 + c\int_\Omega u^{p-2}|\nabla u|^2 \leqslant$$
$$C\int_\Omega|\nabla v|^{2p-2} + C\int_\Omega|\nabla w|^{2p-2} + C,\ t\in(0,\ T_{\max}) \tag{49}$$

证明:取 $c_0,\ \cdots,\ c_p$ **和** $C_0,\ \cdots,\ C_p$ **是引理** 5～8 **中给出的常数,同时取** $M\gg 1$,**使得**

$$Mc_q > 2,\ q\in\{2,\ \cdots,\ p\} \tag{50}$$

进一步,选取 $0<\varepsilon\ll 1$ **满足**

$$\sum_{q=1}^{p-1}\varepsilon M^q C_q < \frac{c_0}{2} \tag{51}$$

且

$$\sum_{q=2}^{p}\varepsilon M^q C_q < 1 \tag{52}$$

固定 $b_0>0$,**并使其充分大,满足**

$$\varepsilon M\left(\frac{b_0}{2} - C_1\right) > C_0 + 1 \tag{53}$$

$$\frac{qb_0}{2} > C_q,\ q\in(2,\ \cdots,\ p) \tag{54}$$

定义

$$d_0 := 1,\ d_q := \varepsilon M^q,\ q\in(1,\ \cdots,\ p) \tag{55}$$

根据引理 5～8,**在式**(49)**左边的求和项中,分别取** $q=0$, $q=1$, $q=\{2,\ \cdots,\ p-1\}$ **及** $q=p$,**并经过重新排序得**

$$
\begin{aligned}
B:=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\sum_{q=0}^{p}d_q\cdot\int_\Omega u^q|\nabla v|^{2p-2q}+\sum_{q=0}^{p}d_q\cdot\int_\Omega u^q|\nabla w|^{2p-2q}\right\}\leqslant\\
&-\left\{c_0-d_1C_1-\sum_{q=2}^{p=1}d_qC_q\right\}\int_\Omega|\nabla v|^{2p-4}|\nabla|\nabla v|^2|^2-\\
&\left\{d_1\left(\frac{b}{2}-C_1\right)-C_0-\sum_{q=2}^{p-1}d_qC_q-d_pC_p\right\}\int_\Omega u^2|\nabla v|^{2p-2}+\\
&d_1\int_\Omega|\nabla u|^2|\nabla v|^{2p-4}-\sum_{q=2}^{p-1}d_qC_q\int_\Omega u^{q-2}|\nabla u|^2|\nabla v|^{2p-2q}+\\
&\sum_{q=2}^{p-1}d_q\int_\Omega u^{q-1}|\nabla u|^2|\nabla v|^{2p-2q-2}-d_pc_p\int_\Omega u^{p-2}|\nabla u|^2-\\
&\left\{\sum_{q=2}^{p-1}d_q\left(\frac{qb}{2}-C_p\right)+d_p\left(\frac{pb}{2}-C_p\right)\right\}\int_\Omega u^{p+1}|\nabla v|^{2p-2q}+\\
&\left\{d_1C_1+\sum_{q=2}^{p-1}d_qC_q\right\}\int_\Omega|\nabla v|^{2p-2}+\sum_{q=2}^{p-1}d_qC_q+d_pC_p-\\
&\left\{c_0-d_1C_1-\sum_{q=2}^{p-1}d_qC_q\right\}\int_\Omega|\nabla w|^{2p-4}|\nabla|\nabla w|^2|^2-\\
&\left\{d_1\left(\frac{b}{2}-C_1\right)-C_0-\sum_{q=2}^{p-1}d_qC_q-d_pC_p\right\}\int_\Omega u^2|\nabla w|^{2p-2}+\\
&d_1\int_\Omega|\nabla u|^2|\nabla w|^{2p-4}-\sum_{q=2}^{p-1}d_qC_q\int_\Omega u^{q-2}|\nabla u|^2|\nabla w|^{2p-2q}+\\
&\sum_{q=2}^{p-1}d_q\int_\Omega u^{q-1}|\nabla u|^2|\nabla w|^{2p-2q-2}-d_pc_p\int_\Omega u^{p-2}|\nabla u|^2-\\
&\left\{\sum_{q=2}^{p-1}d_q\left(\frac{qb}{2}-C_p\right)+d_p\left(\frac{qb}{2}-C_p\right)\right\}\int_\Omega u^{p+1}|\nabla w|^{2p-2q}+\\
&\left\{d_1C_1+\sum_{q=2}^{p-1}d_qC_q\right\}\int_\Omega|\nabla w|^{2p-2}+\sum_{q=2}^{p-1}d_qC_q+d_pC_p,\ t\in(0,T_{\max})
\end{aligned}
\tag{56}
$$

联合式(51)~(55)得

$$
-\left\{c_0-d_1C_1-\sum_{q=2}^{p-1}d_qC_q\right\}\int_\Omega|\nabla v|^{2p-4}|\nabla|\nabla v|^2|^2\leqslant-\frac{c_0}{2}\int_\Omega|\nabla v|^{2p-4}|\nabla|\nabla v|^2|^2 \tag{57}
$$

再由式(52)和(53)得

$$
-\left\{d_1\left(\frac{b}{2}-C_1\right)-C_0-\sum_{q=2}^{p-1}d_qC_q-d_pC_p\right\}\leqslant 0 \tag{58}
$$

进一步,根据式(54)及假设 $b>b_0$ 得

$$
\sum_{q=2}^{p-1}d_q\left(\frac{qb}{2}-C_q\right)+d_p\left(\frac{pb}{2}-C_p\right)>0 \tag{59}
$$

由于 $d_qc_q-d_{q-1}=\varepsilon M^{q-1}(Mc_q-1)>\varepsilon M^{q-1}>\varepsilon M$, $q\in(2,\cdots,p)$ 且式(50)中 $M>1$,故有

$$
\begin{aligned}
&d_1\int_\Omega|\nabla u|^2|\nabla v|^{2p-4}-\sum_{q=2}^{p-1}d_qC_q\int_\Omega u^{q-2}|\nabla u|^2|\nabla v|^{2p-2q}+\\
&\sum_{q=2}^{p-1}d_q\int_\Omega u^{q-1}|\nabla u|^2|\nabla v|^{2p-2q-2}-d_pc_p\int_\Omega u^{p-2}|\nabla u|^2=\\
&-\sum_{q=2}^{p}(d_qc_q-d_{q-1})\int_\Omega u^{q-2}|\nabla u|^2|\nabla v|^{2p-2q}\leqslant
\end{aligned}
$$

$$-\varepsilon M\sum_{q=2}^{p}\int_{\Omega}u^{q-2}|\nabla u|^{2}|\nabla v|^{2p-2q}\leqslant-\varepsilon M\int_{\Omega}u^{p-2}|\nabla u|^{2}\tag{60}$$

类似推得

$$-\left\{c_0-d_1C_1-\sum_{q=2}^{p-1}d_qC_q\right\}\int_{\Omega}|\nabla w|^{2p-4}|\nabla|\nabla w|^{2}|^{2}\leqslant-\frac{c_0}{2}\int_{\Omega}|\nabla w|^{2p-4}|\nabla|\nabla w|^{2}|^{2}\tag{61}$$

和

$$d_1\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}|\nabla w|^{2p-4}-\sum_{q=2}^{p-1}d_qC_q\int_{\Omega}u^{q-2}|\nabla u|^{2}|\nabla w|^{2p-2q}+$$
$$\sum_{q=2}^{p-1}d_q\int_{\Omega}u^{q-1}|\nabla u|^{2}|\nabla w|^{2p-2q-2}-d_pc_p\int_{\Omega}u^{p-2}|\nabla u|^{2}\leqslant-\varepsilon M\int_{\Omega}u^{p-2}|\nabla u|^{2}\tag{62}$$

取 $c:=\min\left\{\frac{c_0}{2},2\varepsilon M\right\}$,$C:=2\sum_{q=1}^{p}d_qC_q$,结合式(56)~(62)便得式(49),从而引理 9 得证。

从引理 9 中的式(49),可以建立 $\int_{\Omega}u^{p}$,$\int_{\Omega}|\nabla v|^{2p}$ 及 $\int_{\Omega}|\nabla w|^{2p}$ 的先验估计。

引理 10　假设 $p\in\mathbf{N}$,$p\geqslant 3$ 且引理 9 中的假设成立,则存在 $L>0$,满足

$$\int_{\Omega}u^{p}\leqslant L,\ \int_{\Omega}|\nabla v|^{2p}\leqslant L,\ \int_{\Omega}|\nabla w|^{2p}\leqslant L,\quad t\in(0,T_{\max})\tag{63}$$

证明:对每个 $q\in\{1,\cdots,p-1\}$,利用 Young 不等式得

$$\int_{\Omega}u^{q}|\nabla v|^{2p-2q}\leqslant L_1\left(\int_{\Omega}u^{p}+\int_{\Omega}|\nabla v|^{2p}\right)\tag{64}$$

$$\int_{\Omega}u^{q}|\nabla w|^{2p-2q}\leqslant L_1\left(\int_{\Omega}u^{p}+\int_{\Omega}|\nabla w|^{2p}\right)\tag{65}$$

L_1 不依赖 q 和 t,由庞加莱等式 $\int_{\Omega}z^{2}\leqslant L_p\left\{\int_{\Omega}|\nabla z|^{2}+\left(\int_{\Omega}|z|^{\frac{2}{p}}\right)^{p}\right\}$,$z\in W^{1,2}$,$L_p>0$。并结合引理 2,分别取 $z:=u^{\frac{p}{2}}$,$z:=|\nabla v|^{p}$ 和 $z:=|\nabla w|^{p}$ 得

$$\int_{\Omega}u^{p}\leqslant L_p\left\{\int_{\Omega}|\nabla u^{\frac{p}{2}}|^{2}+\left(\int_{\Omega}|u|\right)^{p}\right\}\leqslant\frac{p^{2}L_p}{4}\int_{\Omega}u^{p-2}|\nabla u|^{2}+A^{p}L_p\tag{66}$$

$$\int_{\Omega}|\nabla v|^{2p}\leqslant L_p\left\{\int_{\Omega}|\nabla(|\nabla v|^{2})^{\frac{p}{2}}|^{2}+\left(\int_{\Omega}|\nabla v|^{2}\right)^{p}\right\}\leqslant\frac{p^{2}L_p}{4}\int_{\Omega}|\nabla v|^{2p-4}|\nabla|\nabla v|^{2}|^{2}+A^{p}L_p\tag{67}$$

同理

$$\int_{\Omega}|\nabla w|^{2p}\leqslant\frac{p^{2}L_p}{4}\int_{\Omega}|\nabla w|^{2p-4}|\nabla|\nabla w|^{2}|^{2}+A^{p}L_p\tag{68}$$

其中,$t\in(0,T_{\max})$。综合式(64)~(68)得

$$\begin{aligned}y(t):=&\sum_{q=0}^{p}b_q\cdot\int_{\Omega}u^{q}|\nabla v|^{2p-2q}+\sum_{q=0}^{p}b_q\cdot\int_{\Omega}u^{q}|\nabla w|^{2p-2q}\leqslant\\&L_2\left(\int_{\Omega}u^{p}+\int_{\Omega}|\nabla v|^{2p}\right)+L_2\left(\int_{\Omega}u^{p}+\int_{\Omega}|\nabla w|^{2p}\right)\leqslant\\&\frac{p^{2}L_2L_p}{2}\int_{\Omega}u^{p-2}|\nabla u|^{2}+\frac{p^{2}L_2L_p}{4}\int_{\Omega}|\nabla v|^{2p-4}|\nabla|\nabla v|^{2}|^{2}+\\&\frac{p^{2}L_2L_p}{4}\int_{\Omega}|\nabla w|^{2p-4}|\nabla|\nabla w|^{2}|^{2}+4A^{p}L_2L_p\end{aligned}\tag{69}$$

其中,$L_2>0$ 和 $L_p>0$。进一步,利用 Young 不等式得

$$C\int_{\Omega}|\nabla v|^{2p-2}+C\int_{\Omega}|\nabla w|^{2p-2}\leqslant\frac{2c}{p^{2}L_p}\left(\int_{\Omega}|\nabla v|^{2p}+\int_{\Omega}|\nabla w|^{2p}\right)+L_3\leqslant$$

$$\frac{c}{2}\int_{\Omega}|\nabla v|^{2p-4}|\nabla|\nabla v|^{2}|^{2}+\frac{c}{2}\int_{\Omega}|\nabla w|^{2p-4}|\nabla|\nabla w|^{2}|^{2}+\frac{4cA^{p}}{p^{2}}+L_{3}, \tag{70}$$

在式(49)的两边同时加上 $\frac{2C}{p^{2}L_{2}L_{p}}y(t)$，并结合式(69)和(70)得

$$y'(t)+\frac{2C}{p^{2}L_{2}L_{p}}y(t)\leqslant\frac{12cA^{p}}{p^{2}}+L_{3}+C,\ \frac{2C}{p^{2}L_{2}L_{p}}y(t)>0$$

据此便得到式(63)，从而引理10得证。

3 主要结果的证明

利用引理10中得到的高阶正则性先验估计，现在可完成定理1的证明。

定理1的证明：根据引理10及标准的Moser迭代可以得到：存在常数 $C>0$，满足

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\Omega)}\leqslant C,\ t\in(0,\ T_{\max})。$$

据此并结合引理10，由引理1得到 $T_{\max}=+\infty$，从而模型(1)的整体古典解存在有界性，即定理1证毕。

参 考 文 献

[1] KELLER E F, SEGEL L A. Initiation of slide mold aggregation viewed as an instability[J]. J Theor Biol, 1970, 26(3): 399-415.

[2] LUCA M, CHAVEZ-ROSS A, EDELSTEIN-KESHET L, MOGILNER A. Chemotactic signalling, microglia, and alzheimer's disease senile plague: Is there a connection[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2003, 65(4): 693-730.

[3] PAINTER K, HILLEN T. Volume-filling and quorum-sensing in models for chemosensitive movement[J]. Canadian Applied Mathematics Quarterly, 2002, 10(4): 501-543.

[4] HERRERO M A, VELAZQUEZ J J L. A blow-up mechanism for a chemotaxis model[J]. Ann Scuola Norm Sup Pisa CI Sci, 1997, 24(4): 633-683.

[5] WINKLER M. Finite-time blow-up in the higher-dimensional parabolic-parabolic Keller-Segel system[J]. J Math Pures Appl, 2013, 100(5): 748-767.

[6] GATES M A, COUPE V M, TORRES E M, et al. Saptially and temporally restricted chemoattractant and repulsive cues direct the formation of the nigro-sriatal circuit[J]. European Journal of Neuroscience, 2004, 19(4): 831-844.

[7] LI X, XIANG Z. On an attraction-repulsion chemitaxis system with logistic source[J]. Ima Journal of Applied mathematics, 2016, 81(1): 570-584.

[8] WINKLER M. Boundedness in the higher-dimensional parabolic-parabolic chemotaxis-repulsion chemotaxis system with logistic source[J]. Commun Partial Differential Equations, 2009, 35(8): 1516-1537.

[9] DAL PASSO R, GARCKE H, GRUN G. A fourth-order degenerate parabolic equation: Global entropy estimates, existence, and qualitative behavior of solutions[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1998, 29(2): 321-342.

(责任编辑：郭小敏)